

1 Определение кольца, минимального кольца, алгебры, подалгебры, структура минимального кольца, структура

$\exists X$ - непустое мн-во. Непустое семейство K н/мн-во мн-ва X наз-ся **кольцом**, if оно замкнуто относит. операций пересечения и симм. разности, т.е. $\forall A, B \in K \Rightarrow A \cap B \in K, A \Delta B \in K$

cap: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ 

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \Rightarrow \in K$$

$$A \setminus B = A \Delta (A \cap B) \Rightarrow \in K$$

Кольцо K н/мн-во мн-ва X наз-ся **антирешеткой**, if X авн-ся эл-том K , т.е. $X \in K$.

Кольцо K наз-ся **σ -кольцом**, if объединение счетн. числа мн-в из $K \in K$, т.е. if $\{A_k \in K\} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in K$

Кольцо, авн-ся одновременно алл. и σ -кольцом, наз-ся **σ -алл.**

$\exists S$ - мн-во н/мн-в X Тогда $K(S)$ - **min кольцо**, содержащее S - это кольцо, содержащее S и Δ содержится в $\forall$ кольцо, содержащем S

$\nexists \emptyset / \forall$ мн-ва $S \exists$ min кольцо $K(S)$

Возьмем все $K \supset S \Rightarrow K(S) = \bigcap_{K \supset S} K$. Авн-ся ли $K(S)$ кольцом? $\forall A, B \in K(S) \Rightarrow \forall K \supset S, A, B \in K$. K конечно $\Rightarrow A \cap B, A \Delta B \in K \Rightarrow A \cap B, A \Delta B \in \bigcap_{K \supset S} K = K(S)$

Непуст. с-ма н/мн-в S наз-ся **подалгеброй**, if $\forall A, B \in S$ выполнено: 1) $A \cap B \in S$

2) $\exists$ конеч. набор $A_i \in S, i=1, n$
 $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n A_i$ (т.е. $A \setminus B = \bigcup_{i \in I} A_i, A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \in I, i \neq j$)

Лемма If S — полукольцо, $B = \bigcup_{k=1}^n B_k$ и $B_k \in S$,
 $A \in S$, $k=1, \dots, n$, то $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^m A_i$, где $A_i \in S$
 ▲ [ММИ] При $n=1$ утв. справедливо, т.к. совпадает
 с акс. 2) полукольца.
 □ утв. верно при $n=l-1 \Rightarrow A \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} B_i = \bigcup_{j=1}^m A_j \Rightarrow$
 $\Rightarrow (A \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} B_i) \setminus B_l = \bigcup_{j=1}^m (A_j \setminus B_l) = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_k A_{jk}$, где $A_{jk} \in S$ ■

□ S — полукольцо, тогда $K(S)$ — мин. кольцо,
 содержащее S , состоит из мн-в, являющихся конеч.
 объединениями непересекающихся мн-в из S , т.е. $K(S) =$
 $= K_0(S) = \{A \mid A = \bigcup_{k=1}^n A_k, A_k \in S\}$

▲ По опр. $K_0(S) \Rightarrow K_0(S) \subset K(S)$. А/дек-та $K(S) = K_0(S)$
 дост. пока-ть, что $K_0(S)$ само явл-ся кольцом. □ $A =$
 $= \bigcup_{i=1}^m A_i \in K_0(S)$, $B = \bigcup_{j=1}^n B_j \in K_0(S) \Rightarrow$ по лемме $\Rightarrow$
 $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^m A_{ik}$, где $A_{ik} \in S \Rightarrow A \setminus B = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{k=1}^n A_{ik} \in K_0(S)$
 $\Rightarrow A \cup B = (A \setminus B) \cup B = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{k=1}^n A_{ik} \cup B_j \in K_0(S)$. Т.к. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup$
 $\cup (B \setminus A) \Rightarrow A \Delta B \in K_0(S)$. Т.к. $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) \Rightarrow A \cap B \in K_0(S)$ ■

Борелевская алг. — σ -алг., порожд. отк-р. мн-
 -вм